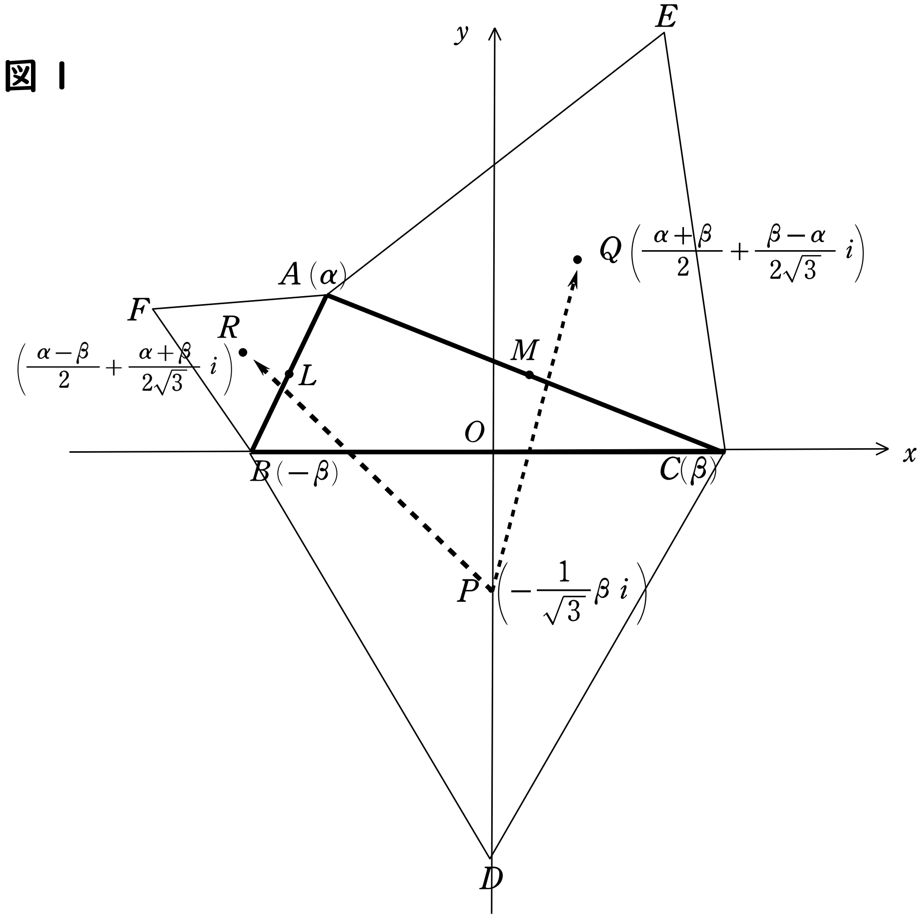
（続）ナポレオンの三角形

山脇の超数学講座 No. 51

「ナポレオンの三角形」の証明を，複素数平面を用いておこなってみよう。

証明 II　$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を原点として，直線 BC を実軸の上に載せる。C，B を表す複素数をそれぞれ β，$-\beta$ とおく。点 A を表す複素数を α とし，β は実数であり，$\beta>0$ とする。また，α の虚部の値も正であるとする。

図 I



辺 BC，CA，AB を1辺とする正三角形を $\triangle ABC$ の外側に描く。それぞれ $\triangle BCD$，$\triangle CAE$，$\triangle ABF$ とし，その重心をそれぞれ P，Q，R とする。

点 P を表す複素数 z_1 は，線分の比と $-\frac{\pi}{2}$ 回転を考えて $z_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i$ である。

点 Q を表す複素数 z_2 は，辺 AC の中点 $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ を中心に，点 β を $\frac{\pi}{2}$ 回転して，大きさを $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍にすると考えて，$z_2-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}i\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ゆえに，$z_2=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}i$，　点 R を表す複素数 z_3 も同様に考えて，

$z_3-\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}i\left(\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$，　ゆえに，　$z_3=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}}i$

$\triangle PQR$ が正三角形であることを証明するには，あえてベクトルを使うと，点 P を中心に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\frac{\pi}{3}$ 回転(60°回転)させたとき，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ に重なればよい。複素数では次のようになる。

$$z_3-z_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i\right)\ \cdots\cdots①$$

右辺 $=\frac{\alpha+\beta-(3\beta-\alpha)}{4}+\frac{3(\alpha+\beta)+3\beta-\alpha}{4\sqrt{3}}i=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+3\beta}{2\sqrt{3}}i$，

一方，左辺 $=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+3\beta}{2\sqrt{3}}i$ となって①が成立した。

辺 BC，CA，AB を1辺とする正三角形を $\triangle ABC$ の内側に描く場合，それぞれの重心を点 P'，Q'，R' とすると，対称性により，$P'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\beta i\right)$ となり，また，

$Q'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}i\right)$，$R'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{3}}i\right)$ となるので，$\triangle PQR$ の場合と同様に，$\triangle P'Q'R'$ も正三角形であることが証明できる。ここで $P'(z_1')$，$Q'(z_2')$，$R'(z_3')$ とおく。

$\triangle ABC$，$\triangle PQR$，$\triangle P'Q'R'$ の面積を，それぞれ S，S_1，S_2 とすると，

$S=\frac{1}{2}\times2\beta\times\frac{|\alpha-\overline{\alpha}|}{2}=\frac{1}{2}|\alpha-\overline{\alpha}|\beta$，【$\alpha-\overline{\alpha}$ は純虚数で，$\frac{|\alpha-\overline{\alpha}|}{2}$ は「高さ」となる】

ここで，$z_2-z_1=a+bi$ とおくと，$z_2'-z_1'=a-bi$ となる。（a，b は複素数）

$$S_1=\frac{1}{2}|z_2-z_1|^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}|a+bi|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+bi)(\overline{a}-\overline{b}i)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{|a|^2+|b|^2+(\overline{a}b-a\overline{b})i\}$$

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}|a-bi|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-bi)(\overline{a}+\overline{b}i)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{|a|^2+|b|^2-(\overline{a}b-a\overline{b})i\}$$

ゆえに，$S_1-S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{a}b-a\overline{b})i=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{a}b-a\overline{b}|$ ……②（∵ $\overline{a}b-a\overline{b}$ もまた純虚数）

$a=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$b=\frac{3\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$ であるから，

$\overline{a}b-a\overline{b}=\left(\frac{\overline{\alpha}+\beta}{2}\right)\left(\frac{3\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{3\beta-\overline{\alpha}}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{(\overline{\alpha}-\alpha)\beta}{\sqrt{3}}$ ……③，　②に代入して，

$S_1-S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left|\frac{(\overline{\alpha}-\alpha)\beta}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{2}|\alpha-\overline{\alpha}|\beta=S$　となり，「ナポレオンの外三角形」と「内三角形」の面積の差は，元の三角形（$\triangle ABC$）の面積と等しいことが証明された。

コメント　複素数平面の利用は，正三角形の証明が鮮やかだが，面積の差の証明はやや困難なところがある。しかし，このような別解の存在の中に数学の大きな可能性と魅力がある。